Espaços Vetoriais

Definição: Um espaço vetorial $\langle V, +, \cdot \rangle$ é uma estrutura definida por um conjunto $V \neq \emptyset$ e duas operações

$$+ : V \times V \longrightarrow V \quad \text{e} \quad \cdot : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$$
$$(u, v) \longmapsto u+v \qquad\qquad (\alpha, v) \longmapsto \alpha v.$$

que satisfazem as seguintes propriedades:

i) $\forall\, u, v, w \in V \Longrightarrow (u+v)+w = u+(v+w)$

(ii) $\forall\, u, v \in V, \quad u+v = v+u$

(iii) Existe $0 \in V$ tal que $u+0 = u$

(iv) Dado $v \in V$, existe $-v$ tal que $v+(-v) = 0$.

(v) $\forall\, u, v \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$

(vi) $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $v \in V$, $(\alpha+\beta)v = \alpha v + \beta v$

(vii) $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $v \in V$, $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$

(viii) $1u = u$.

Exemplo: $\langle \mathbb{R}^3, +, \cdot \rangle$ é um espaço vetorial

Exemplo: $\langle \mathbb{R}^4, +, \cdot \rangle$ é um espaço vetorial

Exemplo: $\langle M(m,n), +, \cdot \rangle$ é um espaço vetorial

Exemplo: $\langle P_2, +, \cdot \rangle$ é um espaço vetorial

Exemplo: $\langle C[a,b], +, \cdot \rangle$ é um espaço vetorial

Propriedades de um Espaço Vetorial

Propriedade 1: Se $w+u = w+v$ então $u=v$.

Prova: Note que

$$
\begin{aligned}
u = 0 + u &= (-w+w)+u \\
&= -w + (w+u) \\
&= -w + (w+v) \\
&= (-w+w) + v \\
&= 0 + v = v.
\end{aligned}
$$

Propriedade 2: Para todo $v \in V$ tem-se

$$(-1)\cdot v = -v.$$

Prova:

$$v + (-1)\cdot v = 1\cdot v + (-1)\cdot v$$

$$= (1 + (-1))\, v$$

$$= 0 \cdot v = 0 .$$

<u>Obs:</u> $u - v$ significa $u + (-v)$

Obviamente,

$$u - v = w \iff u = v + w .$$