DCET
Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas

UESB

Governo do Estado da Bahia

Lista de Exercícios de Álgebra Linear I

14/08/2023

1. Sejam $u = (x_1, \cdots, x_n)$ e $v = (y_1, \cdots, y_n)$ vetores do $\mathbb{R}^n$. Mostre que um deles é múltiplo do outro se, e somente se, $x_i y_j = x_j y_i$ para quaisquer $i, j = 1, \cdots, n$.

2. Defina a média $u * v$ entre dois vetores u e v no espaço vetorial V pondo $y * v = 1/2u + 1/2v$. Prove que $(u * v) * w = u * (v * w)$ se, e somente se, $u = w$.

3. Sejam V um espaço vetorial e $u, v \in V$. O segmento de reta de extremidades u e v é, por definição, o conjunto

$$[u, v] = \{(1 - t)u + tv; 0 \leq t \leq 1\}.$$

Um conjunto $X \subset V$ chama-se convexo quando $u, v \in X$ implica em $[u, v] \subset X$, Mostre que

a) A interseção $X_1 \cap X_2 \cap \cdots \cap X_m$ de conjuntos convexos $X_1, X_2, \cdots, X_m \subset V$ é um conjunto convexo.

b) Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$, o conjunto $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; ax + by \leq c\}$ é convexo em $\mathbb{R}^2$.

c) O conjunto $Y = \{x, y, z) \in \mathbb{R}^3; a \leq x \leq b, c < y < d\}$ é convexo em $\mathbb{R}^3$.

4. Prove que o disco $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$ é um conjunto convexo.

5. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos. Defina a adição em $\mathbb{C}$ por

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i,$$

e defina a multiplicação por escalar por

$$\alpha(a + bi) = \alpha a + \alpha bi,$$

para todos os números reais α. Mostre que $\mathbb{C}$ é um espaço vetorial.

6. Mostre que $\mathbb{R}^{m \times n}$, com as operações usuais de adição e multiplicação usuais de matrizes satisfaz as propriedades de espaço vetorial.

7. Mostre que o elemento zero de um espaço vetorial é único.

8. Seja S o conjunto dos pares ordenados de númeos reais. Defina adição e multiplicação por escalar em S por

$$\alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2) \quad \text{e} \quad (x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, 0).$$

   Mostre que S com essas operações não é um espaço vetorial.

9. Seja $\mathbb{R}^+$ o conjunto de todos os número reais positivos. Defina a multiplicação por escalar, denotada por $\circ$, por $\alpha \circ x = x^\alpha$, para todo $x \in \mathbb{R}^+$ e todo número real α. Defina a operação de adição, denotada por $\oplus$, por $x \oplus y = x \cdot y$, para todo $x, y \in \mathbb{R}^+$. $\mathbb{R}^+$ é um espaço vetorial com essas operações?

10. Em um espaço veorial, mostre que, se $w + u = w$ então $u = 0$. Mostre ainda que, se $w + u = 0$ então $u = -w$.

11. Dados $0 \in \mathbb{R}$ e $v \in V$, um espaço vetorial. Mostre que $0 \cdot v = 0$. Mostre ainda que vale $\alpha \cdot 0 = 0$.

12. Dados os vetores $u = (1, 2, 3)$, $v = (3, 2, 0)$ e $w = (2, 0, 0)$, ache os números α, β, γ tais que $\alpha u + \beta v + \gamma w = (1, 1, 1)$.

13. Dados os vetores $u = (1, 2, 3)$, $v = (3, 2, 1)$ e $w = (-3, 2, 7)$ em $\mathbb{R}^3$, obtenha números α, β tais que $w = \alpha u + \beta v$. Quantas soluções admite esse problema?

14. Mostre que $\langle M(m, n), +, \cdot\rangle$ é um espaço vetorial com as operações comumente definidas para $M(m, n)$ (matrizes de ordem $m \times n$).

15. Mostre que $\langle P_2, +, \cdot\rangle$ é um espaço vetorial com as operações comumente definidas para P_2 (polinômios de ordem menor que ou igual a 2).

16. Mostre que $\langle \mathcal{F}[a, b], +, \cdot\rangle$ é um espaço vetorial com as operações comumente definidas para $\mathcal{F}[a, b]$ (funções $f : [a, b] \to \mathbb{R}$).