DCET
Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas

UESB

Governo do Estado da Bahia

Lista de Exercícios de Álgebra Linear I

30/08/2023

1. Considere os subespaços $F_1, F_2 \subset \mathbb{R}^3$ assim definidos: F_1 é o conjunto de todos os vetores $v = (x, x, x)$ que têm as três coordenadas iguais e F_2 é o conjunto de todos os vetores $w = (x, y, 0)$ que têm a última coordenada igual a zero. Mostre que $\mathbb{R}^3 = F_1 \oplus F_2$.

2. Dados $u = (1, 2)$ e $v = (-1, 2)$, sejam F_1 e F_2 as retas que passam pela origem em $\mathbb{R}2$ e contém u e v, respectivamente. Mostre que $\mathbb{R}^2 = F_1 \oplus F_2$.

3. Prove que o conjunto $\mathcal{S}$, das matrizes simétricas, e o conjunto $\mathcal{W}$, das matrizes antisimétricas, são subespaços vetoriais de $\mathcal{M}(n \times n)$. Mostre ainda que $\mathcal{M}(n \times n) = \mathcal{S} \oplus \mathcal{W}$.

4. Mostre que o vetor $b = (1, 2, 2)$ não é combinação linear dos vetores $v_1 = (1, 1, 2)$ e $v_2 = (1, 2, 1)$.

5. Mostre que o conjunto das funções pares é um subespaço vetorial do espaço $\mathcal{F}(E; F)$, que é o espaço das funções $f : E \to F$.

6. Quais dos seguintes conjuntos são subespaços vetoriais? Justifique!
   a) O conjunto dos vetores do $\mathbb{R}^n$ cujas coordenadas formam uma progressão aritmética.
   b) O conjunto dos vetores do $\mathbb{R}^n$ cujas coordenadas formam uma progressão geométrica.
   c) Os vetores do $\mathbb{R}^n$ cujas primeiras k coordenadas são iguais.
   d) Os vetores do $\mathbb{R}^n$ que têm k coordenadas iguais.
   e) Os vetores (x, y) tais que $x^2 + 3x = y^2 + 3y$.
   f) As funções $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ tais que $f'' - 2f' + f = 0$.

7. Mostre que, dados os números $a_1, \cdots, a_n, c$, o conjunto V dos vetores $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tais que
$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = c$$
é um subespaço vetorial do $\mathbb{R}^n$ se, e somente se, $c = 0$.

8. Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é limitada quando existe um $k > 0$ (dependendo de f) tal que $|f(x)| \leq k$ para todo $x \in X$. Prove que o conjunto das funções limitadas é um subespaço de $\mathcal{F}(X; \mathbb{R})$ (conjunto de todas as funções $f : X \to \mathbb{R}$).