UESB
DCET
Departamento de Ciências
Exatas e Tecnológicas

Governo do
Estado da Bahia

Lista de Exercícios de Álgebra Linear I

03/11/2023

1. Se $P, Q : E \to E$ são projeções e $PQ = QP$, mostre que PQ é uma projeção cujo núcleo é $\text{Kern}(P) + \text{Kern}(Q)$ e cuja imagem é $\text{Im(P)} \cap \text{Im}(Q)$.

2. Exprima um vetor arbitrário $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ como soma de um vetor do plano F_1, cuja equação é $x + y - z = 0$, com um vetor da reta F_2, gerada pelo vetor $(1, 2, 1)$. Conclua que $\mathbb{R}^3 = F_1 \oplus F_2$. Determine a matriz, relativa à base canônica) da projeção $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, que tem imagem F_1 e núcleo F_2.

3. É dado que uma transformação linear $P : E \to E$. Assinale veradeiro (V) ou falso (F):

   ( ) Se $E = \text{Kern}(P) \oplus \text{Im}(P)$ então P é uma projeção.

   ( ) Se $E = \text{Kern}(P) + \text{Im}(P)$ então P é uma projeção.

   ( ) Se P é uma projeção então $I - P$ é uma projeção.

   ( ) Se P é uma projeção então $\text{Im}(P) = \text{Kern}(I - P)$ e $\text{Kern}(P) = \text{Im}(I - P)$.

4. Se $\text{Kern}(P) = \text{Im}(I - P)$, mostre que a transformação linear $P : E \to E$ é uma projeção.

5. Mostre que a transformação linear $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dada por $P(x, y) = (-2x - 4y, 3x/2 + 3y)$ é a projeção sobre uma reta. Determine o núcleo e a imagem de P.

6. Seja $A : E \to E$ uma transformação linear em um espaço vetorial de dimensão finita. Mostre que $E = \text{Kern}(A) \oplus \text{Im}(A)$ se, e somente se, $\text{Kern}(A) = \text{Kern}(A^2)$.

7. Sejam $P, Q : E \to E$ projeções. Mostre que as seguintes afirações são equivalentes:

   a) $P + Q$ é uma projeção.

   b) $PQ + QP = 0$.

   c) $PQ = QP = 0$.

8. Prove que o produto de duas involuções é uma involução se, e somente se, elas comutam.

9. Seja $P : E \to E$ uma projeção. Prove que os vetores v e $(1 - t)v + tPv$, para todo $v \in E$ e todo $t \in \mathbb{R}$, têm a mesma imagem por P.